ЛЕКЦИЯ № 11

Влияние диссипации на вынужденные колебаний.

Волны гасят ветер.
А. и Б. Стругацкие

В предыдущей лекции мы рассмотрели линейные колебания осциллятора под действием вынуждающей силы. При возбуждении системы на собственной частоте осциллятора его амплитуда бесконечно нарастает – наблюдается *линейный резонанс*. В реальных системах всегда есть затухание, которое приводит к ограничению роста амплитуды при резонансном воздействии. При наличии трения уравнение (10.10) принимает вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\lambda\dot{x} = f\cos(\omega t)/m. \tag{11.1}$$

При одновременном учете внешней силы и затухания они компенсируют друг друга на частоте этой силы, и возможны стационарные колебания с этой частотой. При этом колебания на собственной частоте осциллятора затухают, и стационарное решения является одночастотным. Но из-за торможения координата осциллятора отстает от фазы вынуждающей силы. Т.е. решение остается гармоническим, но имеет вид $x = A\cos(\omega t - \alpha)$, где фаза колебания уже не произвольна, а является определенной функцией частоты: $\alpha = \alpha(\omega)$. Если представить это решение в виде

$$x = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t), \tag{11.2}$$

и подставить в (11.1), то получим систему уравнений, приравняв нулю коэффициенты при $\cos(\omega t)$ и $\sin(\omega t)$:

$$a\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + b\,2\lambda\omega = f/m, \tag{11.3}$$

$$b\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - f\,2\lambda\omega = 0. \tag{11.4}$$

Их решения имеют вид

$$a = \frac{f}{m}\frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}, \qquad b = \frac{f}{m}\frac{2\lambda\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}, \tag{11.5}$$

или в терминах амплитуды и фазы:

$$A = \frac{f}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}, \qquad \alpha = arctg\frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{11.6}$$

Графики этих функций приведены на Рис.11.1, а эволюция резонансной зависимости с изменением параметра затухания – на Рис.11.2.

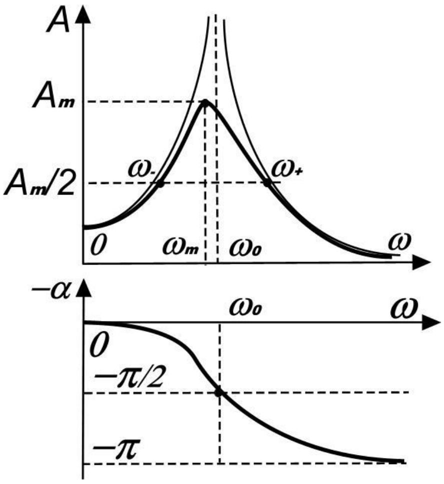

Рис.11.1

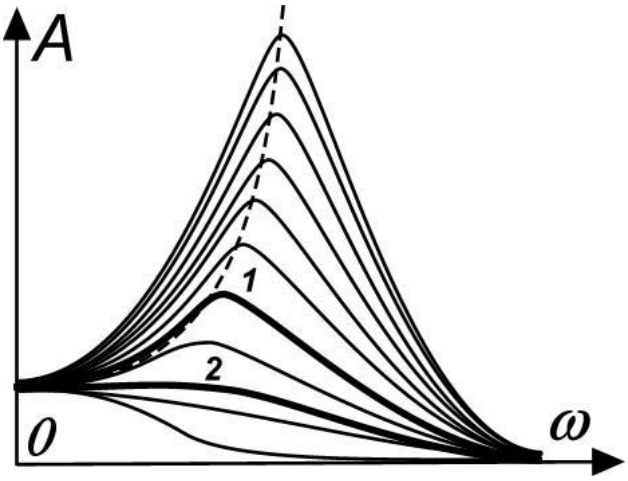

Рис.11.2

Амплитуда колебания достигает максимума при частоте $\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$. (Напомним, что при учете трения частота свободных колебаний равна $\omega^2 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$, см.(9.18)). В этой точке максимальная амплитуда равна

$$A_m = \frac{f}{m}\frac{1}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}. \tag{11.7}$$

Во избежание недоразумения заметим, что формула (11.7) справедлива только для величин затухания $\lambda < \omega_0/\sqrt{2}$. При критическом значении $\lambda = \omega_0/\sqrt{2}$ максимум кривой $A(\omega)$ перемещается в точку $\omega = 0$. При наличии трения можно ввести понятие *полуширины* резонансного пика. В нашем случае амплитуда колебаний равна $A_m/2$ при частотах $\omega_\pm^2 = \omega_m^2 \pm 2\sqrt{3}\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. Таким образом, при малом трении амплитуда резонансной кривой равна $A_m \approx f/2m\lambda\omega_0$, а ее полуширина $\Delta\omega \approx 2\sqrt{3}\lambda$. На Рис.11.2 кривая 1 соответствует значению $\lambda = \omega_0/2$, при котором $\omega_- \to 0$, а кривая 2 – значению $\lambda = \omega_0/\sqrt{2}$, при котором $\omega_m \to 0$.

В эксперименте, как правило, амплитуду колебаний в физической среде определить трудно, Поэтому в резонансных экспериментах измеряют поглощение внешнего периодического поля, воздействующего на среду. Чтобы связать это поглощение с параметрами среды, воспользуемся формулой (9.13) для поглощения энергии $dE/dt = -2F$ с диссипативной функцией из (9.14) $F = m\lambda\,\dot{x}^2$, и усредним ее по периоду колебания, получим потерю энергии за период $I = \Delta E/T = m\lambda\langle\dot{x}^2\rangle$. Учитывая, что для решении $x = A\cos(\omega t - \alpha)$ имеем $\langle\dot{x}^2\rangle = A^2\omega^2/2$, получаем для зависимости поглощения от частоты

$$I = \frac{f^2\lambda\,\omega^2}{m}\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}. \tag{11.8}$$

График этой зависимости приведен на Рис.11.3.

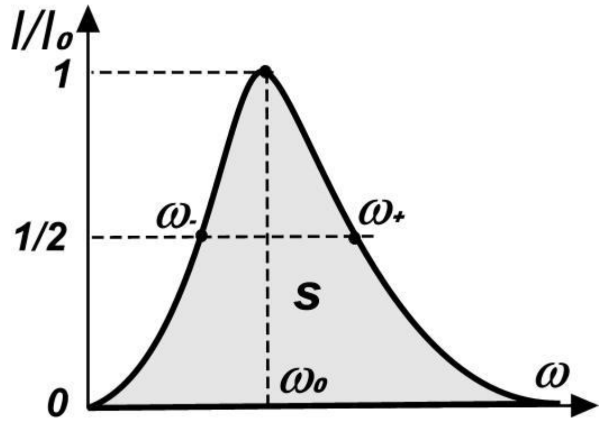

Рис.11.3

Этот график несколько отличается от резонансной кривой на Рис.11.1. Прежде всего, максимальное значение $I_{\max} = f^2/4\lambda m$ достигается на собственной частоте осциллятора. Поэтому, если моделировать динамику твердого тела, как динамику совокупности осцилляторов, например, как однородную прецессию всех магнитных моментов магнетика (*однородный ферромагнитный резонанс*), то из положения максимума экспериментальной кривой поглощения можно определить собственную частоту магнетика, связанную с магнитной анизотропией. Кроме того, частоты, на которых поглощение равно половине поглощения в максимуме, равны теперь $\omega_{\pm} = \sqrt{\omega_0^2 + \lambda^2} \pm \lambda$, и полуширина резонансной кривой $\Delta\omega = 2\lambda$. Поэтому определение ширины резонансной кривой дает нам удвоенную константу затухания. Ее можно вычислить и по площади под резонансной кривой. Обычно экспериментальная зависимость поглощения от частоты представляется в условных единицах, поэтому эту кривую нормируют, т.е. строят зависимость для величины $I/I_0 = I/I(\omega = \omega_0)$:

$$\frac{I}{I_0}=\frac{4\omega^2\lambda^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\lambda^2\omega^2}. \qquad (11.9)$$

Легко вычислить площадь под резонансной кривой. При слабой диссипации с $\lambda \ll \omega_0$ эта величина легко вычисляется:

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4\lambda^2\omega^2 d\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\lambda^2\omega^2}\approx\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4\lambda^2\omega_0^2 d\omega}{4\omega_0^2\left(\omega_0-\omega\right)^2+4\lambda^2\omega_0^2}=\lambda^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{z^2+\lambda^2}=\pi\lambda. \qquad (11.10)$$

Точное вычисление интеграла приводит к выражению $S=\pi\lambda/\sqrt{1-\lambda^2/\omega_0^2}$.

Дополнение

Рассмотрим эту же задачу о влиянии затухания на явление резонанса на примере вращающегося магнитного момента. Без затухания она была рассмотрена на предыдущей лекции (см. Рис. 10.7). Линейные колебания (вращения) описываются линеаризованным уравнением (10.10), а учет затухания был обсужден в Лекции № 9 (см.(9.20)). Таким образом, в этой модели динамика описывается уравнением

$$i\frac{d\psi}{dt}=\left(\omega_0-i\lambda\right)\psi-f\,e^{-i\omega t}. \qquad (10.11)$$

Подставляя в него решение в виде $\psi=\psi_0\exp(-i\omega t)$, получаем для амплитуды ψ_0 выражение

$$\psi_0=-\frac{f}{\left(\omega-\omega_0\right)+i\lambda}=-\frac{f\exp\left(-i\,arctg\left(\lambda/\left(\omega-\omega_0\right)\right)\right)}{\sqrt{\left(\omega-\omega_0\right)^2+\lambda^2}}. \qquad (10.12)$$

Окончательное решение задачи выглядит таким образом: $\psi=A\exp\left(-i\left(\omega t-\alpha\right)\right)$ с

$$A=\frac{f}{\sqrt{\left(\omega-\omega_0\right)^2+\lambda^2}}, \qquad \alpha=-arctg\frac{\lambda}{\omega-\omega_0}. \qquad (10.13)$$

Эти зависимости изображены на Рис.11.4.

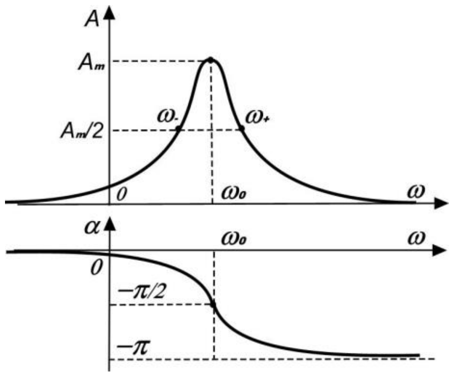

Рис.11.4

Эти зависимости проще, чем в случае рассмотренного выше осциллятора: они симметричны относительно резонансной частоты и отсутствует сдвиг максимума относительно собственной частоты ω_0. Максимальная амплитуда равна $A_m = f/\lambda$ и полуширина резонансной линии равна $\Delta\omega = 2\sqrt{3}\lambda$ поскольку $\omega_\pm = \omega_0 \pm \sqrt{3}\lambda$ на Рис.11.4. На зависимости величины $A^2(\omega)$, которая определяет поглощение высокочастотного поля, полуширина, как и выше, равна 2λ. Т.е. все основные характеристики процесса резонанса с двух моделях качественно совпадают, но модель магнитного момента проще для исследования.